Dr. Oliver Bär WS 2009/10

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie
Übungsblatt 7

Übung 7.1: In Anwesenheit eines Gravitationsfeldes lautet die Wirkung des elektromagnetischen Feldes $S = \int d^4x \mathcal{L}_{\rm EM}$, wobei

$$\mathcal{L}_{\rm EM} \;=\; -\frac{1}{4}\sqrt{g} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \;=\; -\frac{1}{4}\sqrt{g} g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$$

und $\sqrt{g} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}$.
a) Berechnen Sie den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes,

$$T_{\mu\nu} \;=\; -\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm EM}}{\delta g^{\mu\nu}}\,.$$

Hinweis: Verwenden (und zeigen) Sie

$$\frac{\delta\sqrt{g}}{\delta g^{\mu\nu}} \;=\; -\frac{1}{2}\sqrt{g} g_{\mu\nu}\,.$$

b) Der kanonische Energie-Impuls-Tensor $\theta_{\mu\nu}$ ist definiert durch

$$\theta_{\mu\nu} \;=\; g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\rm EM} - \frac{\partial\mathcal{L}_{\rm EM}}{\partial(\partial^\mu A^\lambda)}\partial_\nu A^\lambda\,.$$

Berechnen Sie $\theta_{\mu\nu}$ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis für $T_{\mu\nu}$.

Übung 7.2: Die Einsteinschen Feldgleichungen mit kosmologischer Konstante Λ lauten

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \;=\; \kappa T_{\mu\nu}\,, \qquad \kappa \;=\; \frac{8\pi G}{c^4}\,. \tag{1}$$

a) Wiederholen Sie die Schritte aus der VL und zeigen Sie, dass Gleichung (1) in der nichtrelativistischen Näherung auf die modifizierte Poissongleichung

$$\Delta\phi \;=\; 4\pi G\rho - \Lambda c^2 \tag{2}$$

führt.
b) Zeigen Sie, dass diese Gleichung für $\rho = 0$ (Vakuum) die Lösung

$$\phi(\vec{r}) \;=\; -\frac{c^2\Lambda}{6}|\vec{r}|^2$$

besitzt (mit Wahl $\phi(0) = 0$ für die Integrationskonstante). Welche Kraft übt ein solches Potential auf einen Testkörper der Masse m aus?
c) Die Umlaufdauern der Planeten im Sonnensystem sind sehr genau gemessen und stimmen gut mit der Vorhersage der Newtonschen Mechanik überein. Diese Messungen liefern somit eine obere Schranke für Λ:
Berechnen Sie für kreisförmige Planetenorbits die Umlaufdauern T_Λ und T_0, die aus (2) mit $\Lambda \neq 0$ und $\Lambda = 0$ folgen. Finden Sie eine Formel für die relative Abweichung $R_T = |T_\Lambda - T_0|/T_0$. Schätzen Sie R_T aus den Daten für den Zwergplaneten Pluto ab (Umlaufradius $= 6 \times 10^{14}$cm, Sonnenmasse $= 2 \times 10^{33}$g).

Übung 7.3: Gehen Sie von der Standardform der Schwarzschildmetrik aus und führen Sie die Transformation

$$r \;=\; \left(1 + \frac{r_S}{4\overline{r}}\right)^2 \overline{r}$$

durch, und zeigen Sie, dass dies auf

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -\left(\frac{1-\frac{r_S}{4\overline{r}}}{1+\frac{r_S}{4\overline{r}}}\right)^2 c^2\mathrm{d}t^2 + \left(1 + \frac{r_S}{4\overline{r}}\right)^4 \left[\mathrm{d}\overline{r}^2 + \overline{r}^2\mathrm{d}\Omega\right],$$

führt, die sogenannte *isotropische Form* der Schwarzschildmetrik. Ist diese Form divergent für $r \to r_S$?

Übung 7.4: Bei der Herleitung der Schwarzschildmetrik sind wir in der VL von einer verschwindenden kosmologischen Konstanten ausgegangen. Für den Fall $\Lambda \neq 0$ gilt es die Gleichung

$$R_{\mu\nu} \;=\; \Lambda g_{\mu\nu}$$

mit dem allgemein kugelsymmetrischen Ansatz zu lösen. Zeigen Sie, dass dies auf die modifizierte Schwarzschildmetrik

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -\left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) c^2\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \quad (3)$$

führt.