Dr. Oliver Bär WS 2009/10

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie
Übungsblatt 6

Übung 6.1: Betrachten Sie die Kugeloberfläche S^2, parametrisiert durch Kugelkoordinaten (θ, φ) ($\rightarrow$ Übungen 4.4 und 5.1). Zeigen Sie, dass die Kurven
a) mit konstantem Winkel φ (*Längengrade*)
b) mit konstantem Winkel $\theta = \pi/2$ (*Äquator*)
Geodäten sind.

Übung 6.2: Betrachten Sie den Torus T^2 mit der Metrik aus Übung 5.2, und finden Sie, analog zur vorherigen Aufgabe, spezielle Lösungen der Geodätengleichung.

Übung 6.3: In der nichtrelativistischen Näherung setzt man ($\rightarrow$ VL)

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\vec{x}) \tag{1}$$

an und findet für die $\mu = \nu = 0$ Komponente den Zusammenhang

$$h_{00}(\vec{x}) = \frac{2\Phi_{\mathrm{grav}}(\vec{x})}{c^2} \tag{2}$$

mit dem Newtonschen Gravitationspotential Φ_{grav}. Schätzen Sie $|h_{00}|$ auf a) der Sonnen- und b) der Jupiteroberfläche ab.

Übung 6.4: Zeigen Sie für Matrizen $A = A(x)$ die Beziehung

$$\mathrm{tr}\Big[A^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x^\nu}A(x)\Big] = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Big[\ln\det A(x)\Big]\,. \tag{3}$$

Hinweis: Schreiben Sie $A = \exp B$.

Übung 6.5: Zeigen Sie, dass aus der inhomogenen Maxwellgleichung

$$\partial_\mu\Big(\sqrt{g}F^{\mu\nu}\Big) = j^\nu \tag{4}$$

die allgemein kovariante Kontinuitätsgleichung für die Stromdichte folgt,

$$\nabla_\nu j^\nu = 0\,. \tag{5}$$